Intégrale de Dirichlet (235, 236, 239)

Candelpergher p. 30 et 212

thm : L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est semi-convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

démo : * Étape 1 : Mq $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est non intégrable sur $[0,+\infty[$.

On a $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi}\,dx$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{\pi+k\pi}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

* Étape 2 : Mq $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est semi-convergente ie $\lim_{A\to+\infty} \int^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existe

Pour $A \geq 1$, on a par intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \underbrace{\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^A}_{\text{admet une limite quand } A\to+\infty} + \underbrace{\int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx}_{<+\infty \text{ car } \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \in L^1([1,+\infty[)}$$

De plus $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx < +\infty$ car $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue et bornée sur $[0,1]$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx < +\infty$.

* Étape 3 : Déterminons sa valeur.

Soit $A\in\mathbb{N}^*$ ($A>0$). On pose $f :]0,A[\times \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto e^{-xy}\sin(x)$

Par le thm de Fubini-Tonelli, on a : $\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

$$\int_{]0,A[\times\mathbb{R}_*^+} |e^{-xy}\sin(x)|\,dx\,dy = \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\right)|\sin(x)|\,dx = \int_0^A |\sin(x)|\,\frac{1}{x}\,dx \underset{\text{par étape 1}}{<+\infty}$$

Donc f est intégrable sur $]0,A[\times\mathbb{R}_*^+$.

Par le thm de Fubini, on a : $\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^A e^{-xy}\sin(x)\,dx\right)dy$ (*)

Comme $e^{-xy}\sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{-xy}e^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{x(i-y)}\right)$, on obtient

$$\int_0^A e^{x(i-y)}\,dx = \left[\frac{e^{x(i-y)}}{i-y}\right]_0^A = \frac{e^{A(i-y)}-1}{i-y} = \frac{\left(e^{A(i-y)}-1\right)(i+y)}{-1-y^2}$$

$$= \frac{ie^{A(i-y)} - i + ye^{A(i-y)} - y}{-(1+y^2)}$$

$$= \frac{y+i-ye^{A(i-y)} - e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})}}{1+y^2}.$$

Ainsi $\int_0^A e^{-xy}\sin(x)\,dx = \mathrm{Im}\left(\frac{y+i-ye^{-yA}e^{Ai} - e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})}}{1+y^2}\right)$

$$= \frac{1-ye^{-yA}\sin(A) - e^{-yA}\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)}{1+y^2} = \frac{1-e^{-yA}\left(y\sin(A)+\cos(A)\right)}{1+y^2}$$

Donc en injectant dans (*), on a :

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-yA}\left(y\sin(A)+\cos(A)\right)}{1+y^2}\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-yA}\left(y\sin(A)+\cos(A)\right)}{1+y^2}\,dy$$

$$= \left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_0^{+\infty} - I(A).$$

• Mq $I(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. On pose $g(A,y) = \frac{e^{-yA}\left(y\sin(A)+\cos(A)\right)}{1+y^2}$

i. $\forall A>0$, la fonction $y \longmapsto g(A,y)$ est continue.

ii. ypp $\lim_{A\to+\infty} g(A,y) = 0$

iii. $\forall A>0$, $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\left|\frac{e^{-yA}\left(y\sin(A)+\cos(A)\right)}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Par le thm de convergence dominée, on a $I(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Questions : Intégrale de Dirichlet

- $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi} dx$?

La fonction $x \longmapsto |\sin(x)|$ est π-périodique

- $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge ?

Par le critère de Cauchy : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2}$

- $\frac{ie^{A(i-y)} - i + ye^{A(i-y)} - y}{-(1+y^2)} = \frac{y+i-ye^{Ai}e^{-Ay} - e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})}}{1+y^2}$?

$$\frac{ie^{A(i-y)} - i + ye^{A(i-y)} - y}{-(1+y^2)} = \frac{y+i-ie^{Ai}e^{-Ay} - ye^{Ai}e^{-Ay}}{1+y^2} \underset{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}{=} \frac{y+i-e^{i\frac{\pi}{2}}e^{Ai}e^{-Ay} - ye^{Ai}e^{-Ay}}{1+y^2}$$

$$= \frac{y+i-ye^{Ai}e^{-Ay} - e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})}}{1+y^2}$$

- $\left|\frac{e^{-yA}(y\sin(A)+\cos(A))}{1+y^2}\right| \leq \frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}$?

On a $1+y^2 > 0$ donc $\left|\frac{e^{-yA}(y\sin(A)+\cos(A))}{1+y^2}\right| = \frac{e^{-yA}|y\sin(A)+\cos(A)|}{1+y^2}$

De plus $|y\sin(A)+\cos(A)| \leq |y\sin(A)| + |\cos(A)| \leq y+1$.

Mais ~~[illegible]~~ $A \geq 1$ donc $-yA \leq -y$ Donc $e^{-yA} \leq e^{-y}$ par strict croissance de l'exponentielle.

Ainsi on obtient le résultat que l'on souhaite.

- Pourquoi $\frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R}_*^+)$?

~~Par croissance~~ C'est une fonction continue qui tend vers 0 en l'infini et vaut 1 en 0

Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En particulier sur $\mathbb{R}_*^+$